LINEARE ALGEBRA

ÜBUNGSBLATT 13

Wir betrachten einen Körper K.

Wir brauchen in die nächste Betrachtungen den folgenden Ergebnoiss (ohne Beweis):

Theorem 0.1 (Hamilton–Cayley)**.** *Sei V ein K-Vektorraum, mit $n = \dim_K V$. Sind $A \in \mathcal{M}_n(K)$ die Matrix eines Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ bezüglich einer befesten Basis v von V, und $p_A(t) = p_f(t) = (-1)^n t^n + p_{n-1}t^{n-1} + \ldots + p_1 t + p_0$ der charakteristische Polinom von f, so gilt*

$$(-1)^n A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \ldots + p_1 A + p_0 I_n = 0_{n\times n}$$

in $\mathcal{M}_n(K)$

1. Man überprüefe den Hamilton–Cayley Theorem für den Fall $n = 2$.

2. Man betrachte die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Hilfe den Hamilton–CAylel Theorem, berechne man A^n für alle $n \in \mathbb{Z}$.

3. Man betrachte einen K-Vektorraum V mit $n = \dim_K V$. Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein diagonalisierbar Endomorphismus. Man zeige, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist ein Isomorphismus (d.h. Automorphismus).
(ii) $0 \notin \mathrm{Spec}(f)$.

4. Man betrachte einen K-Vektorraum V mit $n = \dim_K V$, und ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$, mit der matrix $A = [f]_v$ bezüglich einer befesten Basis v von V. Man spricht manchmal über die Eigenwerte und Eigenvektoren von A statt f.

a) Ist λ eine Eigenwert von A, so ist λ^k für A^k fúr alle $k \in \mathbb{N}$.
b) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ Eigenwerte der Matrix $A \in \mathcal{M}_n(K)$ und ist $q = q_0 + q_1 t + \ldots + q_m t^m \in k[t]$ ein Polynom, so zeige man dass $\det q(A) = q(\lambda_1)\ldots q(\lambda_n)$, und bestimme man alle Eigenwerte der Matrix $q(A)$.

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien

E-mail address, George Ciprian Modoi: cmodoi@math.ubbcluj.ro